УДК 441.20

# ФАЗОВЕ УКРУПНЕННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ С ЗАХИСТОМ

**Н.В. Літвін**

Приазовський державний технічний університет, Маріуполь
*e-mail: litvin-nv@yandex.ua*

Розглянемо систему масового обслуговування (СМО), яка складається з k різних робочих приладів та одного пристрою захисту, які функціонують незалежно. Функціонування робочих приладів описується процесами відновлення (ПВ) з часами відновлення $\beta_i$, що мають функції розподілу $G_i(t)=P(\beta_i \le t),\ \ i=\overline{1,k}$. Функціонування пристрою захисту описується альтернувальним процесом відновлення з часом роботи $\alpha_1$ і часом відновлення $\alpha_0$, які мають функції розподілу $F_i(t)=P(\alpha_i \le t), i=0,1$. У випадку відмови якогось з робочих приладів пристрій захисту в робочому стані миттєво відновлює працездатність приладу, що відмовив. Якщо ж відмова сталася під час відновлення пристрою захисту, то система вважається такою, що вийшла з ладу (аварійна відмова).

Побудуємо напівмарковський прилад (ПМ), який замінить собою k різних робочих приладів та дослідимо доцільність та вартісну оцінку захисту. Щоб побудувати математичну модель ПМ приладу застосуємо процес марковського відновлення (ПМВ) $\{\xi_n^o, \Theta_n^o, n \ge 0\}$ в дискретному фазовому просторі $E=\{1,2,\dots,k\}$, який виходить за допомогою алгоритму стаціонарного фазового укрупнення процесу марковського відновлення, що описує суперпозицію k процесів відновлення [1]. Запишемо необхідні позначення та формули:

$$b_i=\int_0^\infty\left(1-G_i(t)\right)dt,\ \ \mu_i=\frac{1}{b_i},\ \ \mu^{(k)}=\sum_{i=1}^k \mu_i . \qquad (1)$$

З урахуванням позначень (1) для стаціонарних величин перескоку $\beta_i^*$ запишемо

$$\overline{G_i^*}(t)=\frac{1}{b_i}\int_t^\infty\left(1-G_i(x)\right)dx=\mu_i\int_t^\infty\overline{G_i}(x)dx, g_i^*(t)=\frac{1}{b_i}\left(1-G_i(t)\right)=\mu_i\overline{G_i}(t), \qquad (2)$$

$$\overline{G_{(i)}^*}(t)=\prod_{j\ne i}^k\overline{G_j^*}(t). \qquad (3)$$

**Теорема 1**. *ПМ прилад у стаціонарному режимі описується процесом марковського відновлення (ПМВ)* $\{\xi_n^0, \Theta_n^0; n \ge 0\}$ *у кінцевому фазовому просторі станів* $E=\{1,2,\dots,k\}$ *півмарковським ядром*

$Q(t)=\left[Q_{ij}(t);i,j=\overline{1,k}\right]$, *елементи якого обчислюються за формулами*

$$Q_{ij}(t)=\mu_j\int_0^t\overline{G_i}(x)\overline{G_j}(x)\prod_{l\neq i,j}^{k}\overline{G}_l^*(x)dx\text{, якщо } i\neq j, \quad (4)$$

$$Q_{ii}(t)=\int_0^t\overline{G}_{(i)}^*(x)dG_i(x)\text{, якщо } i=j. \quad (5)$$

Застосовуючи алгоритм стаціонарного фазового укрупнення до ПМВ $\left\{\xi_n^0,\Theta_n^0;n\geq 0\right\}$ з ПМ ядром (4), (5), отримаємо простий ПВ з часом відновлення $\Theta_k$, який має функцію розподілу $U^{(k)}(t)=P\left(\Theta_{(k)}\leq t\right)$ [1]. Позначимо $m_{(k)}=M\Theta_{(k)}=\int_0^\infty\overline{U}^{(k)}(t)dt$. У приведених позначеннях має місце теорема.

**Теорема 2.** *Функція розподілу* $U^{(k)}(t)$ *часу відновлення* $\Theta_k$ *приладу, який описує суперпозицію k незалежних ПВ, у стаціонарному режимі має вигляд*

$$U^{(k)}(t)=1-\overline{U}^{(k)}(t)=1-\sum_{i=1}^{k}\rho_i\overline{G}_i(t)\overline{G}_{(i)}^*(t), \quad (6)$$

*де:* $\rho_i$ *– стаціонарні ймовірності станів* $i\in E=\{1,2,\ldots,k\}$, *причому* $\rho_i=\mu_i/\mu^{(k)}$, $\mu_i$, $\mu^{(k)}$ *визначені в (1),* $\overline{G_{(i)}^*}(t)$ *– в (3), а* $m_{(k)}=1/\mu^{(k)}$.

Таким чином, отримали, що k різних приладів можна замінити одним напівмарковським приладом з часом відновлення $\Theta_{(k)}$, який має функцію розподілу $U^{(k)}(t)=1-\overline{U}^{(k)}(t)$ вигляду (6), і для якого $M\Theta_{(k)}=1/\mu^{(k)}$.

Введемо до розгляду коефіцієнт надійності захисту системи $r=a_0/a_1$, $0<r<1$, де $M\left(\alpha_0\wedge\Theta_{(k)}\right)=a_0$. Коефіцієнт r характеризує якість функціонування захисного пристрою. При зменшенні r надійність захисту системи збільшується. Отже для інтенсивності відмов $\Lambda$ можна записати $\Lambda=r\mu^{(k)}$. Нехай вартість одного відновлення системи без захисту $c_0$. Тоді сумарна вартість експлуатації системи без захисту за одиницю часу буде $c_0\mu^{(k)}$, оскільки за час T кількість відновлень системи $T/M\theta_{(k)}=T\mu^{(k)}$. Вартість експлуатації системи с захистом за одиницю часу $c/r$. Чим вище надійність захисного приладу, тим більша вартість системи обслуговування. Позначимо через z сумарну вартість експлуатації системи обслуговування с захистом за одиницю часу. Враховуючи штрафи за аварійне відновлення для z можна записати

$$z = c/r + c_0\Lambda = c/r + c_0 r\mu^{(k)} = c_0\left( c/{c_0 r} + r\mu^{(k)} \right).$$

Якщо позначити $\delta = c/c_0$, то функція вартості $z = c_0\left( \delta/r + r\mu_{(k)} \right)$. Захист доцільний тільки в тому випадку, коли вартість експлуатації системи с захистом не перевищує вартості експлуатації системи без захисту (за одиницю часу), тобто $z \le c_0\mu^{(k)}$ – умова доцільності захисту. Її можна переписати у вигляді

$$\delta/r + r\mu^{(k)} \le \mu^{(k)}, \text{ або } r^2\mu^{(k)} - r\mu^{(k)} + \delta \le 0. \tag{7}$$

Нерівність (7) має розв'язок, якщо $\mu^{(k)} \ge 4\delta$. Останнє свідчить, що інтенсивність потоку заявок на відновлення системи пропорційна вартості експлуатації захисного приладу і обернено пропорційна вартості аварійного відновлення. Отже виходить, що для всіх значень r таких, що

$$\frac{\left(1 - \sqrt{1 - 4\delta/\mu^{(k)}}\right)}{2} \le r \le \frac{\left(1 + \sqrt{1 - 4\delta/\mu^{(k)}}\right)}{2},$$

захист має зиск.

Дослідимо функцію вартості z на екстремум і знайдемо оптимальну вартість експлуатації системи обслуговування с захистом. Із (7) виходить $\mu^{(k)} - \delta/r^2 = 0$, звідки отримуємо, що $r_{опт} = \sqrt{\delta/\mu^{(k)}}$, тож відповідне значення функції z має вигляд $z_{min} = 2c_0\sqrt{\mu^{(k)}\delta} = 2\sqrt{cc_0\mu^{(k)}}$. Вираз для $r_{опт}$ можна записати у вигляді $r^2_{опт} = c/{c_0\mu^{(k)}}$, звідки $c_0\mu^{(k)} = c/{r^2_{опт}}$. Отже, $z_{min} = 2c/r_{опт}$. Останнє співвідношення показує, що підвищення надійності захисту приводить до росту вартості експлуатації всієї системи. Зважаючи на цю обставину не завжди слід прагнути до підвищення надійності захисного пристрою, бо необхідно враховувати при цьому вартість відновлення системи без захисту $c_0$ (вартість аварійного відновлення).

**Література**


1. Королюк, В. С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем [Текст] / В. С. Королюк, А. Ф. Турбин – К. : Наук. думка, 1982. – 235 с.

2. Королюк, В. С. Математические основы фазового укрупнения [Текст] / В. С. Королюк, А. Ф. Турбин – К. : Наук. думка, 1978. – 248 с.

3. Літвін Н.В. Напівмарківський прилад для багатоканальної системи обслуговування. [Текст] : материалы XII междунар. заочной науч.-практ. конф. «Развитие науки в XXI веке», 16 апреля 2016 г. Харьков / сборник со статьями, 1 часть (уровень стандарта, академический уровень). – Д.: научно-инф. центр «Знание», 2016. – С. 44 – 50.